Zadatak 1:

Napisati funkciju $F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,C\,\overline{D}$ u obliku zbira potpunih proizvoda.

Rješenje:

Potpuni logički proizvod je proizvod u kome se pojavljuju sve promjenljive tačno po jedanput. Data funkcija ima četiri promjenljive što znači da svaki potpuni proizvod ima četiri člana. Proizvodi koji imaju manje od četiri člana se dopunjavaju nedostajućim promjenljivima:

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\,\overline{B}\cdot 1+\overline{A}\,C\,\overline{D}\cdot 1=\overline{A}\,\overline{B}\overbrace{(C\,D+\overline{C}\,D+C\,\overline{D}+\overline{C}\,\overline{D})}^{(C+\overline{C})(D+\overline{D})=1}+$$
$$+\overline{A}\,C\,\overline{D}\overbrace{(B+\overline{B})}^{=1}=\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D+\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}$$

Ova funkcija se može predstaviti i tabelarno (tabela 1), upisujući jedinice na mjestima na kojima proizvodi imaju vrijednost logičke jedinice (gdje komplementirana promjenljiva ima vrijednost nula, a nekomplementirana vrijednost jedan):

$$F=\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D}_{0011}+\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D}_{0001}+\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}}_{0010}+\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}_{0000}+\underbrace{\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}}_{0110}$$

Na ostalim mjestima u tabeli se upisuju nule.

Tabela 1

i	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Ovdje je veoma važno voditi računa o redoslijedu promjenljivih u proizvodima, koji mora odgovarati redoslijedu u tabeli.

Iz ove tabele se vidi da se funkcija može zadati i kao **zbir** indeksa (i) za koje je funkcija jednaka **jedinici**. U tom slučaju svaka promenljiva ima svoju težinu, o čemu se mora voditi računa. U tabeli 5.1 promjenljiva A ima najveću, a promjenljiva D najmanju težinu.

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,6)$$

Na sličan način se funkcija može zadati i kao **proizvod** indeksa (i) za koje je funkcija jednaka **nuli**:

$$F(A,B,C,D)=\prod(4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

Zadatak 2:

Algebarskim postupkom dokazati jednakost sume potpunih proizvoda i proizvoda potpunih suma za funkciju:

$$F(A,B,C)=\sum(0,2,4,5,7)$$

Rješenje:

Prvi korak je popunjavanje tabele koja opisuje funkciju F. Na mjestima indeksa navedenih u sumi upisuju se jedinice, a na ostalim mjestima se upisuju nule (tabela 2).

Suma potpunih proizvoda dobija se iz slogova na kojima funkcija ima vrijednost 1. Ako promjenljiva ima vrijednost 1 uzima se njena originalna vrijednost u proizvodu, a ako ima vrijednost 0 uzima se komplementirana vrijednost u proizvodu:

$$F_p = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C$$

Tabela 2

i	A	B	C	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Proizvod potpunih suma dobija se iz slogova na kojima funkcija ima vrijednost 0. Ako promjenljiva ima vrijednost 0 uzima se njena originalna vrijednost u zbiru, a ako ima vrijednost 1 uzima se komplementirana vrijednost u zbiru:

$$F_s = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Jednakost ovih izraza može se dokazati njihovim uprošćavanjem:

$$F_p = \overline{A}\,\overline{C}\,\overbrace{(\overline{B} + B)}^{=1} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C + A\,\overline{B}\,C =$$

$$= \overline{A}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overbrace{(C + \overline{C})}^{=1} + A\,C\,\overbrace{(B + \overline{B})}^{=1} = \overline{A}\,\overline{C} + A\,\overline{B} + A\,C$$

$$F_s = (A + A\,\overline{B} + A\,\overline{C} + A\,B + B\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C) =$$

$$= (A\,\overbrace{(1 + \overline{B} + \overline{C} + B)}^{=1} + \overline{C}\,\overbrace{(B + \overline{B} + 1)}^{=1})(\overline{A} + \overline{B} + C) =$$

$$= (A + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C) = A\,\overline{B} + A\,C + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} =$$

$$= A\,\overline{B} + A\,C + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overbrace{(A + \overline{A})}^{=1} =$$

$$= A\,\overline{B} + A\,C + \overline{A}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} =$$

$$= A\,\overline{B}\,\overbrace{(1 + \overline{C})}^{=1} + A\,C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overbrace{(1 + \overline{B})}^{=1} = A\,\overline{B} + A\,C + \overline{A}\,\overline{C}$$

Pošto su se u oba slučaja dobili isti izrazi, iz toga slijedi da su početni izrazi jednaki.

Zadatak 3:

Tri člana komisije glasaju pritiskom na taster. Odluka se donosi većinom glasova.

a) Projektovati prekidačku mrežu koja realizuje ovu funkciju paleći sijalicu kada se odluka donese.

b) Projektovati mrežu za realizaciju ove funkcije koristeći logička kola.

Rješenje:

Pošto je funkcija zadata tekstualno, u obliku problema koji treba riješiti, prvi korak je napraviti tabelu za traženu funkciju. Uzećemo da je član komisije glasao za odluku ako je njegova promjenljiva jednaka logičkoj jedinici. Takođe, logička jedinica u funkciji označavaće da je odluka donesena. Dakle, u vrstama tabele 3 u kojima bar dvije promjenljive imaju vrijednost logičke jedinice upisuju se jedinice, a na ostalim mjestima se upisuju nule.

Tabela 3

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Na osnovu tabele 3 se može napisati algebarski oblik funkcije. Ako se piše u obliku sume potpunih proizvoda, upisuju se članovi na kojima funkcija ima vrijednost logičke jedinice. Pri tome, ako promjenljiva ima vrijednost logičke nule piše se komplement te promjenljive, a u suprotnom se piše promjenljiva bez komplementa:

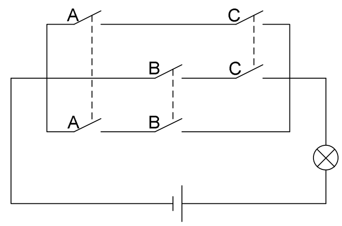
$$F(A,B,C) = \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$$

Prije realizacije funkciju je potrebno uprostiti:

$$F = B\,C\,(A + \overline{A}) + A\,B\,(C + \overline{C}) + A\,C\,(B + \overline{B}) =$$

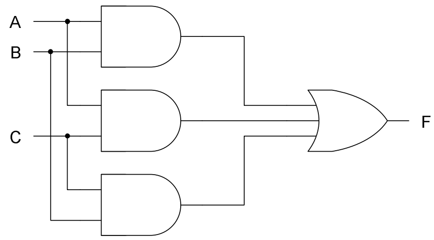
$$= B\,C + A\,B + A\,C$$

a) Logički proizvod se realizuje rednom vezom prekidača, a logički zbir paralelnom vezom:



Slika 1

b) Realizacija pomoću logičkih kola:



Slika 2

Zadatak 4:

Projektovati logičku mrežu koja će signalizirati pojavu dekadne cifre (BCD) djeljive sa dva.

Rješenje:

Dekadna cifra je djeljiva sa dva ako prilikom dijeljenja sa dva nema ostatka (ostatak je nula). Dekadne cifre su 0 do 9, što znači da se samo one mogu naći na ulazu mreže. Pošto je najveća dekadna cifra 9 (tj. $1001_{(2)}$) na ulaz se dovode četiri bita (A, B, C i D). Kombinacije nakon $1001_{(2)}$ se ne mogu pojaviti tokom ispravnog rada, pa se zato na njihovim mjestima u tabeli 4 upisuje X (proizvoljna vrijednost). Na taj način se postiže najbolja minimizacija:

Tabela 4

N	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	X	X	X	X
10	1		X	X

$F = \overline{D}$

Zadatak 5:

Zadata je Bulova funkcija: $F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,5,8,14) + X(4,10,13)$

Indeksima uz X su označeni slogovi na kojima funkcija može imati proizvoljnu vrijednost.

a) Odrediti minimalni izraz za funkciju sa zbirom proizvoda.

b) Odrediti minimalni izraz za funkciju sa proizvodom zbirova.

c) Algebarski utvrditi da li su dobijeni izrazi jednaki.

Rješenje:

a)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	X	1		
11		X		1
10	1			X

$F_P = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D} + A\,C\,\overline{D}$

b)

AB \ CD	00	01	11	10
00			0	
01	X		0	0
11	0	X	0	
10		0	0	X

$F_S = (\overline{A} + \overline{D})(\overline{C} + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{B} + C + D)$

c) Dobijeni izrazi su sigurno jednaki logičkoj jedinici na slogovima (0,1,2,5,8,14) i jednaki logičkoj nuli na slogovima (3,6,7,9,11,12,15). Međutim, pošto su na slogovima (4,10,13) vrijednosti uzimane proizvoljno, kako bi se dobila minimalnija forma, funkcije ne moraju biti iste. U ovom slučaju funkcije nijesu iste, jer je npr. F_P na slogu 4 jednako 1, a F_S na istom slogu jednako 0. To je zato što je u prvoj mapi slog 4 tretiran kao 1, a u drugoj kao 0.

Obratiti pažnju:

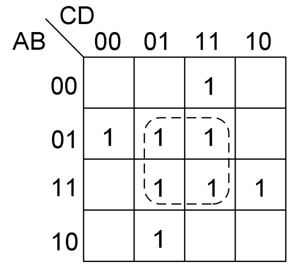
Prilikom izbora površina kojima će se pokriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:

1. zaokružuju se susjedna polja što je moguće većom površinom pri čemu broj pokrivenih polja mora biti jednak 2^n, gdje $n \in \{0,1,2,\ldots\}$;
2. broj površina mora biti što je moguće manji;
3. zaokruživanje se **počinje** od onih jedinica (nula) koje mogu da se zaokruže samo na jedan način!

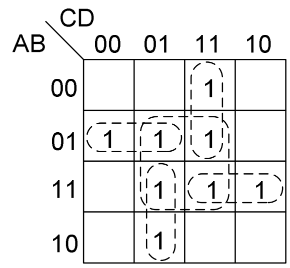
Posljednje pravilo je veoma važno i često se zbog njegova ignorisanja dobija pogrešan (neminimalan) rezultat. To se može najbolje vidjeti iz sljedećeg primjera u kom treba minimizovati funkciju zadatu Karnoovom mapom

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

Na ovoj Karnoovoj mapi se može uočiti površina od 4 polja u sredini koja se čini zgodnom za zaokruživanje, čime se dobija sljedeća mapa:



Na novoj mapi ostaju nepokrivene četiri jedinice, od kojih svaka ima po jednu susjednu, što znači da će se formirati četiri površine od po dva polja:

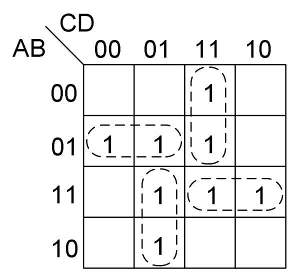


Na osnovu ove mape dobija se funkcija:

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}CD + A\overline{C}D + ABC + BD$$

Prilikom prvog zaokruživanja u ovom primjeru nije se poštovalo pravilo da se zaokruživanje počinje od onih jedinica koje se mogu zaokružiti samo na jedan način. Zaokružene su četiri jedinice od kojih svaka može da se zaokruži na dva načina: u grupu od četiri (kao što je urađeno) i sa po jednom jedinicom koja se nalazi van te grupe.

Ispravan postupak bi podrazumijevao da se zaokruživanje počinje od jedinica koje se mogu zaokružiti samo na jedan način, a to su ovdje polja (ABCD): 0100, 0011, 1110 i 1001. Svaka od ovih jedinica se može zaokružiti sa po jednom susjednom što bi dalo sljedeću mapu:



U ovom slučaju su sve jedinice već pokrivene tako da nije potrebno vršiti dalja zaokruživanja. Jasno je da je površina od četiri jedinice, koja je u prethodnom postupku prva zaokružena, bila višak.

Na osnovu ove mape dobija se funkcija:

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}CD + A\overline{C}D + ABC$$

Ova funkcija je očigledno minimalnija od funkcije dobijene u prvom postupku.